Oraux ; Série N°4

Exercice 1 Rappeler la définition de matrice semblables et équivalentes. Mq toute $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ de rang r est équivalente à J_r.

Exercice 2 [IMT MP] Pour $x \in \mathbb{R}$, on pose $f(x) = \int_x^{4x} \frac{\mathrm{d}t}{(1+t^4)^2}$.

1. Variations, limites de f. Tracer son graphe.
2. Donner un équivalent de f en 0.

Exercice 3 [IMT PSI] Calculer $\Delta_n(x) = \det \begin{pmatrix} 1+x^2 & -x & & 0 \\ -x & \ddots & \ddots & \\ & \ddots & \ddots & -x \\ 0 & & -x & 1+x^2 \end{pmatrix}$.

Exercice 4 [CCP MP] Soit $n \geq 1$. Une urne contient n boules blanches numérotées de 1 à n et deux boules noires numérotées 1 et 2. On effectue le tirage une à une, sans remise, de toutes les boules de l'urne. On note X le rang d'apparition de la première boule blanche et Y le rang d'apparition de la première boule numérotée 1.

1. Déterminer la loi de X.
2. Déterminer la loi de Y.

Exercice 5 [Mines 2022] Soit $\theta \in \mathbb{R}$ tel que $\frac{\theta}{\pi} \notin \mathbb{Q}$ et H un sous-groupe de $(\mathbb{R}, +)$.

1. Montrer que H est soit de la forme $a\mathbb{Z}$, soit dense dans $\mathbb{R}$.
2. Montrer que $\theta\mathbb{Z} + 2\pi\mathbb{Z}$ est dense dans $\mathbb{R}$.
3. Déterminer les valeurs d'adhérence de la suite $\big(\cos(n\theta)\big)$.
4. Déterminer les valeurs d'adhérence de la suite $\big(\cos(\sqrt{n}\theta)\big)$.

Exercice 6 [Mines 2023]
1. Soit (p_n) la suite croissante des nombres premiers. Montrer que $p_1 \dots p_k \geq p_{k+1} + 1$.
2. Soit $n > 6$. Montrer qu'il existe un couple $(a, b) \in (\mathbb{N} \setminus \{0, 1\})^2$ tel que $a + b = n$ et $a \wedge b = 1$.
   Indication : *À quelle condition suffisante (et nécessaire) simple sur d a-t-on $d \wedge (n - d) = 1$?*
3. Soit (p_n) la suite croissante des nombres premiers. Montrer que, pour tout $k \geq 3$, $p_1 \cdots p_k \geq p_{k+1} + p_{k+2}$.

Exercice 7 [Mines 2023] Soit $f \in \mathcal{C}^2([0, 1], \mathbb{R})$ telle que $f(0) = f(1) = 0$. Montrer que $120 \left(\int_0^1 f \right)^2 \leq \int_0^1 (f'')^2$. **Ind** : *CS.*

Exercice 8 [X MP 2023] Soit G un groupe fini de neutre e. Soit φ un automorphisme de G sans point fixe c'est-a-dire tel que : $\forall x \in G$, $\varphi(x) = x \Rightarrow x = e$. On note n l'ordre de φ ; c'est le plus petit entier $n \in \mathbb{N}^*$ tel que $\varphi^n = \mathrm{id}$.

1. Montrer que $\forall x \in G, x\,\varphi(x)\,\varphi^2(x) \cdots \varphi^{n-1}(x) = e$. **Ind** : *Trouver une forme d'éléments x pour lesquels la conclusion est valide.*
2. Si $n = 2$, que peut-on dire du groupe G ? Donner un exemple.
3. Si $n = 3$, montrer que, pour tout $x \in G$, x et $\varphi(x)$ commutent.

Exercice 9 [X MP 2023] On considère la suite réelle définie par $x_0 = 2$ et $x_{n+1} = x_n + \frac{x_n^2}{n^2}$ pour tout $n \geq 1$. Montrer qu'il existe un réel $C > 1$ tel que $x_n \sim C^{2^n} n^2$ quand $n \to +\infty$. **Ind** : *Commencer par des résultats plus faibles sur (x_n).*

Oraux ; Série N°4

Exercice 1 Rappeler la définition de matrice semblables et équivalentes. Mq toute $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ de rang r est équivalente à J_r.

Exercice 2 [IMT MP] Pour $x \in \mathbb{R}$, on pose $f(x) = \int_x^{4x} \frac{\mathrm{d}t}{(1+t^4)^2}$.

1. Variations, limites de f. Tracer son graphe.
2. Donner un équivalent de f en 0.

Exercice 3 [IMT PSI] Calculer $\Delta_n(x) = \det \begin{pmatrix} 1+x^2 & -x & & 0 \\ -x & \ddots & \ddots & \\ & \ddots & \ddots & -x \\ 0 & & -x & 1+x^2 \end{pmatrix}$.

Exercice 4 [CCP MP] Soit $n \geq 1$. Une urne contient n boules blanches numérotées de 1 à n et deux boules noires numérotées 1 et 2. On effectue le tirage une à une, sans remise, de toutes les boules de l'urne. On note X le rang d'apparition de la première boule blanche et Y le rang d'apparition de la première boule numérotée 1.

1. Déterminer la loi de X.
2. Déterminer la loi de Y.

Exercice 5 [Mines 2022] Soit $\theta \in \mathbb{R}$ tel que $\frac{\theta}{\pi} \notin \mathbb{Q}$ et H un sous-groupe de $(\mathbb{R}, +)$.

1. Montrer que H est soit de la forme $a\mathbb{Z}$, soit dense dans $\mathbb{R}$.
2. Montrer que $\theta\mathbb{Z} + 2\pi\mathbb{Z}$ est dense dans $\mathbb{R}$.
3. Déterminer les valeurs d'adhérence de la suite $\big(\cos(n\theta)\big)$.
4. Déterminer les valeurs d'adhérence de la suite $\big(\cos(\sqrt{n}\theta)\big)$.

Exercice 6 [Mines 2023]
1. Soit (p_n) la suite croissante des nombres premiers. Montrer que $p_1 \dots p_k \geq p_{k+1} + 1$.
2. Soit $n > 6$. Montrer qu'il existe un couple $(a, b) \in (\mathbb{N} \setminus \{0, 1\})^2$ tel que $a + b = n$ et $a \wedge b = 1$.
   Indication : *À quelle condition suffisante (et nécessaire) simple sur d a-t-on $d \wedge (n - d) = 1$?*
3. Soit (p_n) la suite croissante des nombres premiers. Montrer que, pour tout $k \geq 3$, $p_1 \cdots p_k \geq p_{k+1} + p_{k+2}$.

Exercice 7 [Mines 2023] Soit $f \in \mathcal{C}^2([0, 1], \mathbb{R})$ telle que $f(0) = f(1) = 0$. Montrer que $120 \left(\int_0^1 f \right)^2 \leq \int_0^1 (f'')^2$. **Ind** : *CS.*

Exercice 8 [X MP 2023] Soit G un groupe fini de neutre e. Soit φ un automorphisme de G sans point fixe c'est-a-dire tel que : $\forall x \in G$, $\varphi(x) = x \Rightarrow x = e$. On note n l'ordre de φ ; c'est le plus petit entier $n \in \mathbb{N}^*$ tel que $\varphi^n = \mathrm{id}$.

1. Montrer que $\forall x \in G, x\,\varphi(x)\,\varphi^2(x) \cdots \varphi^{n-1}(x) = e$. **Ind** : *Trouver une forme d'éléments x pour lesquels la conclusion est valide.*
2. Si $n = 2$, que peut-on dire du groupe G ? Donner un exemple.
3. Si $n = 3$, montrer que, pour tout $x \in G$, x et $\varphi(x)$ commutent.

Exercice 9 [X MP 2023] On considère la suite réelle définie par $x_0 = 2$ et $x_{n+1} = x_n + \frac{x_n^2}{n^2}$ pour tout $n \geq 1$. Montrer qu'il existe un réel $C > 1$ tel que $x_n \sim C^{2^n} n^2$ quand $n \to +\infty$. **Ind** : *Commencer par des résultats plus faibles sur (x_n).*